ONDAS

1) Considere um campo elétrico no vazio dado por:

$$\vec{E} = 100\ \sin(5000\pi t - \beta z)\,\vec{a}_y \quad \text{V/m}$$

Determine:

a) a impedância característica do meio em que a onda se propaga;

b) a constante de atenuação;

c) a constante de deslocamento de fase;

d) a constante de propagação;

e) a velocidade de propagação da onda;

f) o comprimento de onda da onda;

g) o vetor campo magnético;

h) o Vetor Poynting e

i) a potência média.

Resolução:

a)

Non vazio a impedância característica do meio é $|\eta_0| = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ logo,

$$|\eta_0| \cong \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8,854 \times 10^{-12}}} \cong 376,7\ \Omega$$

b)

No vazio a onda não sofre atenuação logo:

$$\boldsymbol{\alpha = 0}$$

c)

No vazio, a constante de deslocamento de fase é $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, logo

$$\beta = 5000\pi\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \qquad \beta \cong 5000\pi\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8{,}854 \times 10^{-12}}$$

$$\boldsymbol{\beta \cong 52.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{rad/m.}}$$

d)

No vazio a constante de propagação é $\gamma = j\beta$, logo

$$\boldsymbol{\gamma = j\,\beta \cong j52.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{rad/m.}}$$

e)

Como a onda se propaga no vazio a sua velocidade de propagação é a da luz, logo:

U = c ≅ 299.792.458 m/s

f)

Para um período a onda avança de um comprimento de onda, logo

quando $\beta z = 2\pi$ tem-se:

$z = \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

$$\boldsymbol{z = \lambda = \frac{2\pi}{52.4\times10^{-6}} \cong 120 \times 10^{3} \quad \mathrm{m}}$$

g)

$$\vec{E} = 100\ \sin(wt - \beta z)\,\vec{a}_y$$

na forma complexa

$$\vec{E} = 100\ \mathrm{e}^{(jwt+0-j\beta z)}\,\vec{a}_y$$

e pela lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \qquad \text{tem-se:}$$

$$-j\omega\mu\vec{H} = 100\,\nabla \times \left(\mathrm{e}^{j(\omega t-\beta z)}\,\vec{a}_y\right)$$

Como apenas existe componente função de z segundo y, o rotacional consiste apenas em:

$$-j\omega\mu_0\vec{H} = 100(-\frac{d}{dz}(\mathrm{e}^{j(\omega t-\beta z)})\vec{a}_x \quad \text{(ver definição de rotacional)}$$

$$-j\omega\mu_0\vec{H} = j\beta 100(\mathrm{e}^{j(\omega t-\beta z)})\vec{a}_x$$

$$\vec{H} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0}E\,\vec{a}_x$$

pelo que sendo $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, tem-se:

$\vec{H} = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}E\,\vec{a}_x$ e como $|\eta_0| = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ logo:

$$\vec{H} = -\frac{1}{|\eta_0|}E\,\vec{a}_x \qquad \vec{H} = -\frac{1}{|\eta_0|}100\ \sin(wt - \beta z)\ \ \vec{a}_x$$

$$\boldsymbol{\vec{H} = -\frac{100}{376{,}7}\ \sin(5000\pi t - 52.4 \times 10^{-6} z)\ \ \vec{a}_x\ \ \mathrm{A/m}}$$

h)

O vetor **Poynting** é dado por $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$, logo como:

$$\vec{E} = 100 \;\; \mathrm{e}^{(jwt - j\beta z)} \, \vec{a}_y \quad \text{e} \qquad \vec{H} = -\frac{100}{|\eta_0|} \mathrm{e}^{(jwt - j\beta z)} \, \vec{a}_x$$

estão na forma complexa, procuremos primeiro os respetivos campos na forma real:

$$\vec{E} = 100 \;\; \sin(wt - \beta z) \; \vec{a}_y \qquad \text{e} \qquad \vec{H} = -\frac{100}{|\eta_0|} \sin(wt - \beta z) \; \vec{a}_x$$

$$\vec{P} = 100 \;\; \sin(wt - \beta z) \; \vec{a}_y \times \left(-\frac{100}{|\eta_0|} \sin(wt - \beta z) \; \vec{a}_x\right)$$

tendo em consideração o produto vetorial $\vec{a}_y \times \vec{a}_x = -\vec{a}_z$, surge, para a potência instantânea que é o vetor **Poynting**:

$$\vec{P} = \frac{100^2}{376{,}7} \;\; \sin^2(wt - \beta z) \; \vec{a}_z$$

$$\boldsymbol{\vec{P} = \frac{100^2}{376{,}7} \;\; \sin^2(5000\pi t - 52.4 \times 10^{-6} z) \; \vec{a}_z \qquad \mathrm{W/m^2}}$$

i)

Como

$$\vec{E} = 100 \;\; \mathrm{e}^{(jwt - j\beta z)} \, \vec{a}_y \qquad \text{e} \qquad \vec{H} = -\frac{100}{|\eta_0|} \mathrm{e}^{(jwt - j\beta z)} \, \vec{a}_x$$

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} R_e\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} R_e \left(100 \;\; \mathrm{e}^{(jwt - j\beta z)} \, \vec{a}_y \times \left(-\frac{100}{|\eta_0|} \mathrm{e}^{(jwt - j\beta z)} \, \vec{a}_x\right)^*\right)$$

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} R_e \left(100 \;\; \mathrm{e}^{j(wt - \beta z)} \times \frac{100}{|\eta_0|} \mathrm{e}^{-j(wt - \beta z)}\right) \vec{a}_z$$

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \times \frac{100^2}{376{,}7} \vec{a}_z$$

$$\boldsymbol{\vec{P}_m = 26{,}65 \, \vec{a}_z \quad \mathrm{W/m^2}}$$